Expressions numériques

- Pour calculer une expression, on effectue en **priorité** :
  – les carrés, les cubes, etc. ;
  – les calculs entre parenthèses ;
  – les multiplications et les divisions ;
  – et enfin les additions et les soustractions.
- Quand des opérations ont le même niveau de priorité, on les effectue de gauche à droite.

Exemple

- $A = 11 + 5 \times (7 - 9) - 7 \times 3^2$
  $A = 11 + 5 \times (7 - 9) - 7 \times 9$
  $A = 13 + 5 \times (-2) - 7 \times 9$
  $A = 13 + (-10) - 7 \times 9$
  $A = 13 + (-10) - 63$
  $A = 3 - 63$
  $A = -60$

- n désigne un entier positif non nul.
  10^n désigne le produit de n facteurs tous égaux à 10.
  $10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \ldots \times 10 \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\,\underbrace{000 \ldots 000}_{n \text{ zéros}}$
- **10^{-n}** désigne l'inverse de 10^n.
  $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}000 \ldots 0001}_{n \text{ zéros}}$
- ***Propriétés :*** m et p désignent des entiers relatifs.
  • $10^m \times 10^p = 10^{m+p}$ • $\dfrac{10^m}{10^p} = 10^{m-p}$ • $(10^m)^p = 10^{m \times p}$

Exemples

- $10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
  $= 1\,000\,000$
- $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1\,000} = 0{,}001$
- • $10^5 \times 10^4 = 10^9$ • $\dfrac{10^9}{10^2} = 10^7$ • $(10^4)^2 = 10^8$

- Soit ***a*** un nombre relatif et ***n*** un entier positif non nul.
- ***aⁿ*** désigne le produit de ***n*** facteurs tous égaux à ***a***. $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots \times a \times a}_{n \text{ facteurs}}$
- a^n se lit « ***a* puissance *n*** » ou « ***a* exposant *n*** ».
- a^{-n} désigne l'inverse de a^n.
  $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, où ***a*** est un nombre relatif différent de zéro.
- ***Propriétés : m*** et ***p*** désignent des entiers relatifs.
  • $10^m \times 10^p = 10^{m+p}$ • $\dfrac{10^m}{10^p} = 10^{m-p}$ • $(10^m)^p = 10^{m \times p}$

Exemples

- $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
  $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
- $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{2 \times 2 \times 2} = \dfrac{1}{8}$
  $(-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{(-3) \times (-3)} = \dfrac{1}{9}$
- $10^5 \times 10^4 = 10^9$ $\dfrac{10^9}{10^2} = 10^7$
  $(10^4)^2 = 10^8$

- La **notation scientifique** d'un nombre décimal positif est la seule écriture de la forme $a \times 10^n$ dans laquelle le nombre a est compris entre 1 et 10 exclu ($1 \leq a < 10$) et n est un entier relatif.

- Pour **additionner** ou **soustraire** deux fractions, il faut les mettre au même dénominateur.

Exemples

Calculons $\dfrac{4}{21} + \dfrac{2}{9}$.
On sait que $63 = 7 \times 3 \times 3 = 21 \times 3 = 9 \times 7$,
ainsi : $\dfrac{4}{21} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{4 \times 3}{21 \times 3} + \dfrac{2 \times 7}{9 \times 7} = \dfrac{12}{63} + \dfrac{14}{63} = \dfrac{26}{63}$

Calculons $\dfrac{7}{6} - \dfrac{5}{4}$.
On sait que $12 = 2 \times 2 \times 3 = 6 \times 2 = 4 \times 3$,
ainsi : $\dfrac{7}{6} - \dfrac{5}{4} = \dfrac{7 \times 2}{6 \times 2} - \dfrac{5 \times 3}{4 \times 3} = \dfrac{14}{12} - \dfrac{15}{12} = \dfrac{-1}{12}$

- Pour multiplier des nombres relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
  a, b, c, d étant des nombres relatifs (avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$) :
  $$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$
- Diviser par un nombre relatif différent de zéro revient à multiplier par son inverse.

Exemples

- $\dfrac{10}{3} \times \dfrac{18}{35} = \dfrac{10 \times 18}{3 \times 35} = \dfrac{5 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2}{3 \times 7 \times 5} = \dfrac{12}{7}$
- $\dfrac{8}{3} : \dfrac{5}{6} = \dfrac{8}{3} \times \dfrac{6}{5} = \dfrac{8 \times 6}{3 \times 5} = \dfrac{8 \times 3 \times 2}{3 \times 5} = \dfrac{16}{5}$

Myriade Maths - Bordas

Expressions littérales

- Pour calculer la **valeur d'une expression littérale**, on remplace les lettres par leurs valeurs et on effectue les calculs en respectant l'ordre des opérations.

Exemples

- On veut calculer l'expression $(x^2 - y + 3x)^2$ lorsque $x = -5$ et $y = -2{,}8$.
  On remplace x par -5 et y par $-2{,}8$:
  $((-5)^2 - (-2{,}8) + 3 \times (-5))^2 = (25 + 2{,}8 - 15)^2$
  $= 12{,}8^2 = 163{,}84$

- La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition et à la soustraction, ce qui signifie que, quels que soient les nombres k, a et b, on a toujours :
  $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$
  ou encore $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$
  Cette propriété permet d'écrire un produit sous la forme d'une somme ou d'une différence : on appelle cela **développer l'expression**.
- Dans le sens inverse, elle permet aussi d'écrire une somme ou une différence sous la forme d'un produit : on appelle cela **factoriser l'expression**.
- **Réduire une expression**, c'est l'écrire sous la forme d'une somme algébrique ayant le moins de termes possibles.

- **Double distributivité**

Quels que soient les nombres a, b, c et d, on a : $(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Exemples

- Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (2x + 4)(5x + 3)$
$A = 2x \times 5x + 2x \times 3 + 4 \times 5x + 4 \times 3$
$A = 10x^2 + 6x + 20x + 12$
$A = 10x^2 + 26x + 12$

$B = (2x - 3)(4x - 2)$
$B = 2x \times 4x + 2x \times (-2) - 3 \times 4x - 3 \times (-2)$
$B = 8x^2 - 4x - 12x + 6$
$B = 8x^2 - 16x + 6$

- **Identité remarquable** : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Exemple

- $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x + 3)(2x - 3)$

- **Propriété**
  On ne change pas les solutions d'une équation si :
  – on développe, on réduit, on factorise chacun des deux membres ;
  – on additionne ou on soustrait un même nombre aux deux membres de l'équation ;
  – on multiplie ou on divise les deux membres de l'équation par un même nombre non nul.

Exemple

Résoudre $5x + 2 = 3x - 9$.
On isole l'inconnue x :
$5x + 2 - 3x = 3x - 9 - 3x$
$2x + 2 = -9$
$2x + 2 - 2 = -9 - 2$
$2x = -11$
$\dfrac{2x}{2} = \dfrac{-11}{2}$
$x = -5{,}5$

- Dire qu'un produit est nul signifie que l'un de ses facteurs est nul. Pour résoudre une équation dont le degré est supérieur ou égal à 2, on essaie de l'écrire sous la forme d'un produit nul.

Exemple

- Résoudre l'équation $(5x + 1)(2x - 3) = 0$.
  C'est une équation produit nul donc l'un des facteurs au moins est nul.
  On remarque qu'il y a deux cas possibles :
  $5x + 1 = 0$ et $2x - 3 = 0$.
  – Premier cas : si $5x + 1 = 0$, on obtient comme solution $x = -\dfrac{1}{5}$;
  – deuxième cas : si $2x - 3 = 0$, on obtient comme solution $x = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

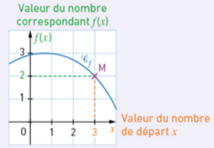
Fonctions

- Une **fonction** est un procédé qui, à un nombre, fait correspondre un autre nombre unique.

- **Notations** : $3 \mapsto f(3)$ signifie « le nombre correspondant au nombre de départ 3 par la fonction f est noté $f(3)$ ».
  $f : 3 \mapsto 2$ signifie « le nombre correspondant au nombre de départ 3 par la fonction f est égal à 2 ».
  On a donc : $f(3) = 2$.
- La **représentation graphique** $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$.

Exemple

Dire que le point M(3 ; 2) appartient à la représentation graphique de la fonction f revient à dire que $f : 3 \mapsto 2$.



- Par une fonction f, lorsqu'au nombre de départ a, on fait correspondre le nombre b, on dit que a est **un antécédent** de b par la fonction f.

Remarque : un nombre peut avoir plusieurs antécédents par une fonction.

Exemples

- Si $f : 2 \mapsto -5$, alors 2 est un antécédent de -5 par la fonction f.
- Si $f(10) = 3{,}5$, alors 10 est un antécédent de 3,5 par la fonction f.

À partir de l'expression algébrique d'une fonction, on peut **vérifier si un nombre est un antécédent** d'un nombre donné.

Exemple

$f : x \mapsto 2x + 5$
7,5 est un antécédent de 20 par f car :
$f(7{,}5) = 2 \times 7{,}5 + 5$
$= 20$.

À partir d'un tableau de valeurs d'une fonction, on peut **lire un ou des antécédents** d'un nombre donné.

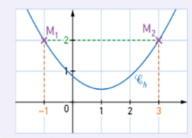
Exemple

x	-5	-1	1
$g(x)$	3	5	-1

Un antécédent de -1 par g est 1.

À partir de la représentation graphique d'une fonction, on peut **lire un ou des antécédents** d'un nombre donné.

Exemple



Des antécédents de 2 par h sont -1 et 3.

- Une fonction **linéaire** f est une fonction qui, à un nombre x, fait correspondre le nombre $a \times x$ où a est un nombre donné.

On note : $f : x \mapsto ax$ ou $f(x) = ax$

- Une fonction linéaire $f : x \mapsto ax$ modélise une **situation de proportionnalité de coefficient a** ; un tableau de valeurs de cette fonction est donc un tableau de proportionnalité.

Exemple

$f : x \mapsto 2x$

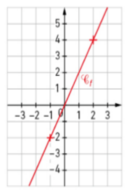
x	-1	0	2
$f(x)$	-2	0	4

$\times 2$

- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une **droite passant par l'origine du repère**.

Exemple

$f : x \mapsto 2x$



Arithmétique

- Un entier naturel est un nombre entier positif ou nul.
- Dire que l'entier naturel a est **multiple** de l'entier naturel b signifie qu'il existe un entier k tel que $a = b \times k$. On dit aussi : « b est un **diviseur** de a » ou encore que « a est **divisible par** b ».
- Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts, 1 et lui-même.

Exemples

- 0, 1, 2, 3 ; … sont des entiers naturels.
- $15 = 3 \times 5$, donc 15 est un multiple de 5. Autrement dit, 5 est un diviseur de 15.
- 2, 3 et 5 sont des nombres premiers. Mais 4 n'est pas premier car 4 a trois diviseurs : 1 ; 2 et 4.

- On peut toujours décomposer un nombre entier non premier en produit de plusieurs facteurs premiers.
- Soit a et b deux entiers. On dit que la fraction $\dfrac{a}{b}$ est **irréductible** lorsque a et b sont premiers entre eux, c'est-à-dire lorsque leur seul diviseur commun est 1.
- On peut rendre une fraction irréductible en décomposant son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers, puis en simplifiant.

Exemples

- $588 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7^2$
- $\dfrac{12}{5}$ est une fraction irréductible.
- $\dfrac{120}{84} = \dfrac{2^3 \times 3 \times 5}{2^2 \times 3 \times 7} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 3 \times 7} = \dfrac{2 \times 5}{7} = \dfrac{10}{7}$

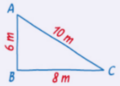
Dans le triangle rectangle

- **Réciproque du théorème de Pythagore**
  Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égale à la somme des carrés des longueurs des deux plus petits côtés, **alors** le triangle est rectangle.

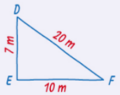
- **Si**, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux plus petits côtés, **alors** le triangle n'est pas rectangle.

Exemples

- ABC est-il rectangle ?
  [AC] est le plus grand côté de ce triangle.
  $AC^2 = 10^2 = 100$
  $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$
  Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$
  D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

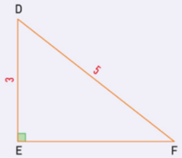


- DEF est-il rectangle ?
  [DF] est le plus grand côté de ce triangle.
  $DF^2 = 20^2 = 400$
  $DE^2 + EF^2 = 7^2 + 10^2 = 149$
  Donc $DF^2 \neq DE^2 + EF^2$
  L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, donc ce triangle n'est pas rectangle.



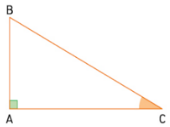
- **Théorème de Pythagore**
  Si un triangle est rectangle, **alors** le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

Exemple



Le triangle DEF est rectangle en E, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore: $DF^2 = DE^2 + EF^2$.
$5^2 = 3^2 + EF^2$, soit $25 = 9 + EF^2$ d'où $EF^2 = 25 - 9$ et donc $EF^2 = 16$, c'est-à-dire $EF \times EF = 16$.
Donc $EF = 4$.
Remarque : si on ne trouve pas la longueur EF mentalement, on peut taper $\sqrt{16}$ sur la calculatrice et on obtient $EF = 4$.

- ABC est un triangle rectangle en A.
  – L'**hypoténuse** du triangle ABC est **[BC]**.
  – Le côté **opposé** à l'angle $\widehat{C}$ est **[AB]**.
  – Le côté **adjacent** à l'angle $\widehat{C}$ est **[AC]**.



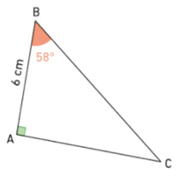
- $\sin(\widehat{C}) = \dfrac{AB}{BC}$ - $\cos(\widehat{C}) = \dfrac{AC}{BC}$ - $\tan(\widehat{C}) = \dfrac{AB}{AC}$

- Le triangle ABC est rectangle en A. On veut calculer les longueurs AC et BC de ce triangle.
  On connait la mesure de l'angle $\widehat{B}$, donc on nomme les côtés du triangle par rapport à cet angle :
  - **Hypoténuse : [BC]** - **Côté opposé à $\widehat{B}$: [AC]** - **Côté adjacent à $\widehat{B}$: [AB]**

  $\tan(\widehat{B}) = \dfrac{AC}{AB}$ donc $\tan(58°) = \dfrac{AC}{6}$ d'où $AC = 6 \times \tan(58°) \approx 9{,}6$ cm

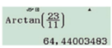
  et

  $\cos(\widehat{B}) = \dfrac{AB}{BC}$ donc $\cos(58°) = \dfrac{6}{BC}$ d'où $BC = \dfrac{6}{\cos(58°)} \approx 11{,}3$ cm.

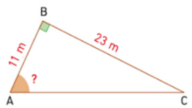


- Le triangle ABC est rectangle en B.
  On veut déterminer la mesure de l'angle $\widehat{A}$.
  On nomme les côtés du triangle par rapport à cet angle :
  - **Hypoténuse : [AC]** - **Côté opposé à $\widehat{A}$: [BC]** - **Côté adjacent à $\widehat{A}$: [AB]**

  On peut donc écrire en utilisant les côtés connus : $\tan(\widehat{A}) = \dfrac{BC}{AB}$
  donc $\tan(\widehat{A}) = \dfrac{23}{11}$.
  La calculatrice donne $\widehat{A} \approx 64°$.



  On peut en déduire que $\widehat{C} \approx 180 - (90 + 64) = 26°$.



Myriade Maths - Bordas

Gestion de données et Proportionnalité

- La **probabilité** d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime « la chance qu'a cet événement de se produire ».
- Dans une expérience aléatoire où tous les événements ont la même chance de se produire, la probabilité d'un événement est égale au quotient :
  $$\frac{\text{nombre de résultats favorables à l'évènement}}{\text{nombre de résultats possibles}}$$

Exemples

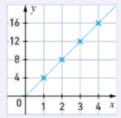
- Dire que la probabilité d'un événement A est $P(A) = 0{,}6$ signifie que cet événement A a 6 chances sur 10 ou 60 % de chance de se produire.
- En jetant un dé à six faces, on a 3 chances sur 6 d'obtenir un nombre pair. La probabilité d'obtenir un nombre pair est donc :
  $3 : 6 = 0{,}5$

- Si on représente graphiquement une situation de proportionnalité, alors on obtient des **points alignés avec l'origine du repère**.
- **Réciproquement**, si une situation est représentée graphiquement par des points alignés avec l'origine du repère, alors c'est une situation de proportionnalité.

Exemples

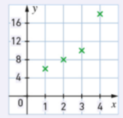
- Exemple de deux séries de nombres proportionnelles :

x	1	2	3	4
y	4	8	12	16



- Exemple de deux séries de nombres non proportionnelles :

x	1	2	3	4
y	6	8	10	18



- Dans un tableau de proportionnalité, toutes les valeurs d'une même grandeur doivent être exprimées dans la **même unité**. On choisit la mieux adaptée à la situation étudiée (heure ou minute… ; km, m ou cm…).

Exemple d'une vitesse moyenne

Un cycliste a roulé pendant 1 h 15 min à une vitesse moyenne de 20 km/h. Quelle distance a-t-il parcouru ?
1 h = 60 min et 1 h 15 min = 75 min

Temps en min	60	75
Distance en km	20	d

Exemple d'une conversion de débit

À débit constant, on cherche le volume en L débité en 1 min sachant qu'un volume de 500 m³ est débité en 1 s.

Volume en L	500 000	x
Temps en s	1	60

Car 500 m³ = 500 000 dm³ = 500 000 L et 1 min = 60 s

- Une **grandeur quotient** est une grandeur obtenue en effectuant le quotient de deux grandeurs.

Exemples

- Vitesse en km/h $= \dfrac{\text{distance parcourue en km}}{\text{durée du parcours en h}}$
- Masse volumique en kg/m³ $= \dfrac{\text{masse en kg}}{\text{volume en m}^3}$

- Une **grandeur produit** est une grandeur obtenue en effectuant le produit de deux grandeurs.

Exemples

- Énergie en Wh = puissance de l'appareil en W × durée d'utilisation en h
- Volume en m³ = longueur en m × longueur en m × longueur en m

- **Appliquer un taux de t %** à un nombre revient à multiplier ce nombre par $\dfrac{t}{100}$.

Exemple

- On veut appliquer une remise de 6 % à 30 € :

Montant initial en €	100	30
Remise en €	6	x

$\times \dfrac{6}{100}$

On calcule : $x = 30 \times \dfrac{6}{100} = \dfrac{180}{100} = 1{,}80$
La remise est de 1,80 €.

- **Déterminer un pourcentage** revient à écrire une proportion sous forme d'une écriture fractionnaire de dénominateur 100.

Exemple

- On veut déterminer le pourcentage de remise correspondant à une baisse de 2,40 € sur un prix initial de 16 € :

Montant initial en €	16	100
Remise en €	2,40	y

On calcule : $y = \dfrac{2{,}40 \times 100}{16} = \dfrac{240}{16} = 15$
On a donc : $\dfrac{2{,}40}{16} = \dfrac{15}{100} = 15\ \%$.

- **Augmenter** un nombre **de t %** revient à le **multiplier** par $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$.
- **Diminuer** un nombre **de t %** revient à le **multiplier** par $\left(1 - \dfrac{t}{100}\right)$.

Exemples

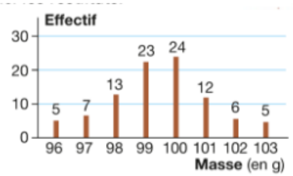
- Augmenter 147 € de 32 % revient à calculer :
  $147 \times \left(1 + \dfrac{32}{100}\right) = 147 \times 1{,}32$
  Coefficient multiplicateur d'augmentation (supérieur à 1)
- Diminuer 147 € de 32 % revient à calculer :
  $147 \times \left(1 - \dfrac{32}{100}\right) = 147 \times 0{,}68$
  Coefficient multiplicateur de diminution (compris entre 0 et 1)

- La **moyenne** d'une série de données est égale à la somme des valeurs de la série divisée par l'effectif total de la série.
- La **médiane** d'une série de données est une valeur telle qu'il y a :
  – au moins la moitié des valeurs inférieures ou égales à cette médiane ;
  – au moins la moitié des valeurs supérieures ou égales à cette médiane.
- L'**étendue** d'une série de données est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de cette série.

Exemples

Dans son entreprise de menuiserie, Jean a six employés dont voici les salaires mensuels : 1 250 € – 1 400 € – 1 280 € – 1 300 € – 2 050 € – 1 600 €.

- Le salaire **moyen de l'entreprise** est :
  (1 250 + 1 400 + 1 280 + 1 300 + 2 050 + 1 600) : 6 = **1 480 €**.
- La valeur **médiane** de la série ordonnée des salaires :
  1 250 € – 1 280 € – **1 300 €** – **1 400 €** – 1 600 € – 2 050 € est le nombre situé au milieu entre **1 300 € et 1 400 €, c'est-à-dire 1 350 €**.
- L'**étendue** de la série des salaires est égale à :
  2 050 – 1 250 = **800 €**.



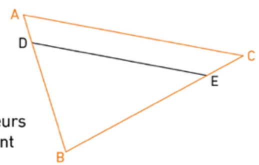
Déterminer la moyenne m, la médiane M et l'étendue de la série constituée par les masses de ces tablettes.

- **Masse moyenne m**
  $5 + 7 + 13 + 23 + 24 + 12 + 6 + 5 = 95$
  $m = \dfrac{96 \times 5 + \ldots + 103 \times 5}{95} = \dfrac{9\,449}{95}$ $m \approx 99{,}5$ g
- **Masse médiane M**
  L'effectif total est impair (95 tablettes).
  $95 = 2 \times 47 + 1$; la médiane est la 48ᵉ masse.
  $5 + 7 + 13 + 23 = 48$ donc M = 99 g.
- **Étendue** : $103 - 96 = 7$. L'étendue est 7 g.

Thalès et triangles semblables

Dans le triangle ABC ci-dessous, on a :
- (DE) // (AC)
- BC = 15 m
- BD = 8,8 m
- AC = 16,5 m
- BE = 12 m

Calculer les longueurs BA et DE en justifiant les réponses.



Dans le triangle ABC, on a (DE) // (AC).
On peut donc utiliser la propriété de Thalès et on obtient :
$\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{DE}{AC}$ soit $\dfrac{8{,}8}{BA} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{DE}{16{,}5}$.
Ainsi :
$BA = \dfrac{8{,}8 \times 15}{12} = 11$ m et $DE = \dfrac{12 \times 16{,}5}{15} = 13{,}2$ m.